UNIVERSITAT D'ALACANT
Facultat de Ciències
Facultad de Ciencias

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

CURSO ACADÉMICO 2017-2018

TÍTULO:

INFLUENCIA DEL FACTOR CAMPO EN LAS ELIMINATORIAS A DOBLE PARTIDO

AUTOR:

ANTONIO LLOPIS GÓMEZ

Resumen

En muchos deportes existen torneos que tienen una fase en la que dos equipos se enfrentan y uno queda eliminado mediante un sistema que se conoce como “eliminatoria a ida y vuelta” y que consiste en que los dos equipos juegan dos partidos, uno en el campo de cada equipo, y el que tenga ventaja en el marcador global vence, jugándose un tiempo extra en el que campo en el que estaba jugándose el segundo partido inmediatamente al finalizar éste para decidir el vencedor si el marcador global fuera de empate.

Este trabajo tiene por objeto de estudio la influencia de dónde se disputan los partidos en la probabilidad de ganar la eliminatoria de los equipos y para ello se centra en el caso del fútbol. Presentaremos un modelo con algunas simplificaciones para poder observar el efecto del campo en el que se juega cada parte de la eliminatoria y veremos como varían los esfuerzos, las probabilidades de ganar y los pagos de los equipos en función de las ventajas que concede jugar como local el partido o la prórroga, partiendo del caso simétrico en el que no existen tales ventajas.

Palabras clave: Factor campo, “eliminatoria a ida y vuelta”, esfuerzos, probabilidades de ganar, pagos, partido de ida, partido de vuelta, prórroga, equipo local, equipo visitante.

Abstract

In many sports there are tournaments that have a round where two teams face each other and one is eliminated by means of a system known as "two-legged tie" and which consists of the two teams playing two games, one in the field of each team, and the one that has an advantage in the overall score wins, playing an extra time in which field in which the second game was played immediately after the end to decide the winner if the overall score was tied.

This work has the purpose of studying the influence of where the matches are played in the probability of winning the qualifying round and for that it focuses on the case of football. We will present a model with some simplifications to be able to observe the effect of the field in which each part of the qualifying round is played and we will see how the efforts, the probabilities of winning and the payoffs of the teams change according to the advantages granted by playing at home the match or the extra time, starting from the symmetrical case in which there are no such advantages.

Key words: Home field advantage, "two-legged tie", efforts, probabilities of winning, payoffs, first leg, second leg, extra time, local team, visiting team.

Índice

1. Introducción

En muchas competiciones deportivas, para saber quién es el vencedor de una eliminatoria y, por tanto, quién pasa a la siguiente ronda de un torneo o quién consigue el trofeo, se utiliza un sistema de doble partido conocido coloquialmente como "eliminatoria de ida y vuelta", debido a que al primer enfrentamiento se le llama partido de ida y al segundo partido de vuelta.

Este sistema consiste en que los contrincantes disputen dos partidos, uno en el estadio de cada equipo, acumulándose el resultado de ambos encuentros. El equipo cuyo marcador global teniendo en cuenta los dos partidos sea mayor es el que resulta vencedor. En caso de empate, para dilucidar quién es el ganador de la eliminatoria, suele haber un tiempo extra que se juega inmediatamente después de haber acabado el segundo partido en el estadio en el que se estaba disputándose dicho partido.

Estadísticamente se observa con facilidad que los equipos consiguen más victorias cuando juegan en su estadio que cuando juegan en el del adversario, lo cual está debido a distintas causas como pueden ser el apoyo de la afición, el estar habituado a las dimensiones y las particularidades del campo propio, el no tener que desplazarse evitando el cansancio del viaje, etc.

La pregunta que surge observando este sistema de eliminatoria es qué resulta más beneficioso para los intereses de un equipo, si jugar en su estadio el primer partido o el segundo, es decir, bajo qué condiciones en lo que se refiere a dónde se van a disputar los partidos tiene más probabilidad un equipo de resultar vencedor.

La intuición puede hacernos pensar que es mejor jugar el segundo partido en nuestro campo porque va a ser el definitivo, el que cierre el marcador global, pudiendo con todas las ventajas que nos da jugar en nuestro estadio corregir el resultado del primer partido si nos es adverso o sentenciar la eliminatoria si ya en el primer partido obtuvimos un triunfo.

Para hacer un análisis con mayor profundidad nos centraremos en el caso del fútbol, que además añade una peculiaridad a este sistema, ya que en caso de empate en el marcador global el vencedor es quien haya marcado más goles en campo contrario. Si los dos equipos han marcado el mismo número de goles en cada campo, se juega un tiempo extra de 30 minutos conocido como prórroga en el estadio en el que se estaba disputando el segundo enfrentamiento inmediatamente a continuación de haber finalizado éste, al término del cual si el marcador global es favorable a uno de los dos equipos o se mantiene en empate pero un conjunto ha conseguido más goles en campo contrario que el otro éste resulta vencedor, mientras que si el marcador no se ha movido tiene lugar el lanzamiento de una tanda de penalties en el mismo recinto.

Para establecer dónde se juega cada partido de la eliminatoria en el fútbol se utilizan principalmente dos procedimientos: por sorteo o atendiendo a la clasificación de los equipos en una fase previa que se juega con el formato de liga.

Cuando se determina por sorteo en qué campo se va a jugar cada enfrentamiento los dos equipos tienen la misma probabilidad de jugar el segundo choque en el estadio propio o en el del rival, mientras que cuando se fija en función de la clasificación en una fase previa siempre es el equipo que quedó en mejor posición el que juega el partido de vuelta en casa.

Por lo tanto, a la vista de cómo funciona este procedimiento uno podría considerar que jugar el segundo partido en tu campo sería un premio por haber obtenido mejores resultado en una etapa anterior de la competición, lo que llevaría a pensar que se tiene la idea de que es mejor jugar el segundo choque en el estadio propio, siendo el objetivo de este trabajo ver si esa idea es acertada o no.

En una competición se puede utilizar siempre un mismo procedimiento desde la primera ronda hasta la final o se pueden alternar como es el caso de la Champions League, la competición más importante del mundo a nivel de clubes, en la que primero se juega una fase de liguilla en grupos de cuatro equipos, quedando los dos últimos eliminados y el primero y segundo clasificados para la siguiente ronda que ya se disputa con el sistema de "eliminatoria de ida y vuelta". En dicha ronda, que serían los octavos de final, se enfrentan el primero de un grupo contra el segundo de otro, jugándose el segundo partido en el recinto del equipo que quedó primero. Sin embargo, para los cuartos de final y las semifinales, que se juegan con el mismo sistema que los octavos, se hace sorteo para establecer en qué campo se juega cada partido.

Debido a la complejidad de trasladar todas las circunstancias que se producen en la vida real en una eliminatoria a doble partido a un modelo, tendremos que realizar algunas simplificaciones que nos permitan centrarnos en la influencia del factor campo, es decir, en la influencia que tiene que un equipo dispute el partido de ida en casa y la vuelta y la prórroga, si fuera necesario que ésta se jugara, fuera o viceversa, puesto que este es el efecto que queremos estudiar con profundidad.

A lo largo del trabajo vamos a presentar un modelo para describir el desarrollo de una "eliminatoria a ida y vuelta" fijándonos sobre todo en cómo varían los esfuerzos, las probabilidades de ganar y los pagos de los equipos en el equilibrio en función de las ventajas con las que cuenta el equipo que juega como local, a las que asignaremos un valor para poder cuantificarlas y que representaremos por θ.

Veremos la gran influencia que tiene este valor de θ, ya que puede hacer que un equipo tenga más probabilidad de ganar que otro cuando a priori sucedía lo contrario, y lo que sucede cuando se combina con el efecto de desaliento("discouraged effect").

También comprobaremos que es cierta la idea que se tiene de que es mejor jugar la vuelta en casa en las condiciones de nuestro modelo, al que faltará añadirle otros efectos que nosotros no tenemos en cuenta para centrarnos en el factor campo. Obtendremos un resultado muy curioso y que contradice lo que nos puede decir nuestra intuición que será que en el primer partido el equipo que juegue como visitante tendrá más probabilidad de ganar el partido a medida que aumenten las ventajas por jugar como local con las que cuenta el equipo que juega en casa.

Presentaremos la "eliminatoria a ida y vuelta" como con un "contest" dinámico con dos etapas fijas como son el partido de ida y el de vuelta más una que se jugaría sólo en caso de empate en el marcador global al término del partido de vuelta y que sería la prórroga.

Las características de este tipo de eliminatoria hacen que el modelo tenga muchas similitudes con el modelo que se describe en el artículo de Klumpp, T. y M. Polborn (2006). En él se estudia el caso de unas elecciones en las que participan dos políticos y que se realizan en tres estados en tiempos distintos, primero votan los habitantes de un estado y gana un candidato, después ocurre lo mismo en el siguiente y si gana el mismo que en el primero, este candidato gana las elecciones, independientemente de lo que ocurra en el tercer y último estado, mientras que si gana el otro candidato es elegido el que gane en el tercer estado.

Es similar al caso que estamos estudiando porque también se trata de un "contest" dinámico entre dos contrincantes con tres etapas en vez de dos fijas más una que puede darse o no, pero como si un mismo candidato gana en las dos primeras lo que ocurra en la tercera es irrelevante sucede lo mismo que si un equipo gana el partido de ida y el partido de vuelta, aunque en el caso de las "eliminatorias a ida y vuelta" la tercera etapa no se disputaría. También suponemos que los dos candidatos son simétricos, o sea, que ninguno parte inicialmente con una ventaja que le haga tener más probabilidad de ganar que su rival, al igual que sucede en nuestro caso, ya que suponemos que los dos equipos tienen un mismo nivel y que ninguno parte con ventaja.

La diferencia con el caso de las elecciones y, en general, con la literatura que existe relacionada con los "contests" dinámicos de varias etapas, es que el estado donde se disputen las elecciones no influye en las probabilidades de ganar de los candidatos, mientras que en las eliminatorias a doble partido el campo donde se juegue cada partido sí afecta a las probabilidades de ganar de los equipos, ya que da ventajas en cada partido al equipo que juega como local.

El modelo que vamos a presentar también tiene similitudes con el que se detalla en el artículo de Fu, Q., J.Lu, y Y. Pan (2015), ya que en él se describe una competición deportiva entre dos equipos en la que para vencer hay que ganar un número determinado de partidos. En este caso, a diferencia del nuestro, los partidos los disputan los integrantes del equipo individualmente y no se tiene en cuenta el lugar donde se disputen.

En estos dos artículos, al igual que en el artículo de Konrad, K. (2012), se estudia también cómo afecta el efecto de desaliento. Este efecto también lo estudiaremos en nuestro modelo en el partido de vuelta en el que veremos cómo afecta al equipo que ha perdido en el partido de ida en su esfuerzo, su probabilidad de ganar y su pago, analizando las dos situaciones posibles con las que puede empezar el partido de vuelta que son que haya ganado el equipo que jugaba como local el partido de ida o que haya ganado el equipo visitante.

2. Modelo

Tenemos dos equipos “A” y “B” luchando por un mismo premio, que sería superar la eliminatoria y que tendría un valor para ambos al que llamaremos V.

Estos dos equipos compiten en un “contest” dinámico que consta de dos etapas fijas, que se corresponderían con el partido de ida y el partido de vuelta, más una que sería la prórroga y que tendría lugar sólo si al término del partido de vuelta el marcador global refleja un empate entre los dos equipos.

Aunque en la realidad puede haber un gran número de resultados en un partido de fútbol, estos pueden clasificarse en tres grupos: que gane el equipo local, que gane el equipo visitante o que se produzca un empate. Para simplificar el modelo hemos supuesto que tanto en el partido de ida como en el de vuelta, al igual que en la prórroga, no hay empate, es decir, uno de los equipos gana el partido o la prórroga. Si gana el equipo local consideraremos que lo hace por 1-0, mientras que si gana el equipo visitante lo hace por 0-1.

Haciendo esto hemos eliminado la influencia de los goles en campo contrario, que en la realidad tienen valor doble en caso de empate en el marcador global, para centrarnos únicamente en la ventaja que otorga jugar en campo propio. Por tanto, en nuestro modelo no hará falta mirar cuántos goles ha marcado cada equipo en campo rival, ya que si se produce un empate en el marcador global al término del partido de vuelta ambos habrán marcado los mismos.

Al eliminar la posibilidad de empate en la prórroga, si se llega a esta tercera etapa uno de los conjuntos vencerá y se convertirá en el ganador de la eliminatoria. Así eliminamos una cuarta etapa que serían los penalties y que en los torneos se da cuando la prórroga concluye con el mismo marcador con el que terminó el segundo partido.

Para lograr el premio que es el triunfo en la eliminatoria los dos equipos realizan un esfuerzo que será no negativo y menor o igual que el valor de V, que es el valor de ganar la eliminatoria para los dos equipos y que para simplificar los cálculos se supondrá que es igual a 1. Denotaremos por g_{A_i} el esfuerzo que realiza el equipo A en la etapa i-ésima siendo la etapa 1 el partido de ida, la etapa 2 el partido de vuelta y la etapa 3 la prórroga, y por g_{B_i} el esfuerzo que realiza el equipo B en la etapa i-ésima.

Para conocer las probabilidades de ganar en cada etapa de los equipos es necesario definir una función que nos permita calcular estas probabilidades y que dependa del esfuerzo que realiza cada equipo. A esta función se la conoce como “contest success function”.

En nuestro modelo usaremos la más habitual en la literatura que es la Tullock. Denotaremos la probabilidad de ganar el partido i-ésimo de A y B por p_{A_i} y p_{B_i}, respectivamente.

La Tullock no considera la posibilidad de empate y definiría las probabilidades de ganar de A y B en la etapa i-ésima si fueran simétricos como:

$$\begin{cases} p_{A_i} & = & \frac{g_{A_i}}{g_{A_i}+g_{B_i}} \\ \\ p_{B_i} & = & \frac{g_{B_i}}{g_{A_i}+g_{B_i}} \end{cases}$$

El caso que estamos estudiando no es simétrico, ya que el equipo que juega en casa tiene unas ventajas de las que no dispone el equipo que juega en campo rival. Esas ventajas las vamos a representar en el modelo con una constante θ que va a ser mayor o igual que uno y que va a multiplicar el esfuerzo que haga el equipo que juega en su estadio, considerando que si es igual a uno jugar en campo propio no concede ninguna ventaja al equipo local. Entonces θg_{A_i} o θg_{B_i}, dependiendo del caso en el que nos encontremos, representa el impacto del esfuerzo del equipo local en la probabilidad de ganar.

Aunque en la realidad se pueden dar casos en que jugar en el campo propio conceda más ventajas a unos equipos que a otros, ya sea por la afición, la relación entre las características del terreno de juego y el juego del equipo u otros factores, vamos a considerar para simplificar el modelo que ambos equipos tienen las mismas ventajas cuando juegan en su estadio por lo que θ va a ser igual para ambos.

Sin pérdida de generalidad, supondremos que el partido de ida se juega en el campo de A, mientras que el partido de vuelta y la prórroga si la hubiera se juega en el campo de B.

Entonces definiremos las probabilidades de ganar de A y B en el partido de ida como:

$$\begin{cases} p_{A_1} & = & \frac{\theta g_{A_1}}{\theta g_{A_1}+g_{B_1}} \\ \\ p_{B_1} & = & \frac{g_{B_1}}{\theta g_{A_1}+g_{B_1}} \end{cases}$$

Como en el partido de vuelta el equipo que juega en casa es B, la constante θ multiplicará el esfuerzo que haga B y tendremos entonces que:

$$\begin{cases} p_{A_2} & = & \frac{g_{A_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}} \\ \\ p_{B_2} & = & \frac{\theta g_{B_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}} \end{cases}$$

La prórroga, en caso de que se jugara, también se disputaría en el campo de B, por lo que θ va a seguir multiplicando el esfuerzo que haga el equipo B. Aunque la consideremos como la etapa 3, realmente no es una etapa como el partido de ida o el de vuelta, ya que entre la disputa de estos dos partidos transcurre un tiempo en el que los equipos descansan y se recuperan del esfuerzo realizado de manera que cuando empieza el partido de vuelta los equipos están como al inicio del partido de ida.

Sin embargo, la prórroga se juega inmediatamente a continuación de haber terminado el partido de vuelta de manera que los equipos están cansados por el esfuerzo que han realizado, así que el coste del esfuerzo será mayor que en el partido de vuelta, aunque nosotros vamos a suponer que es el mismo.

Las probabilidades de ganar de los equipos van a estar definidas de la misma manera que en el partido de vuelta:

$$\begin{cases} p_{A_3} &= \frac{g_{A_3}}{g_{A_3}+\theta g_{B_3}} \\ \\ p_{B_3} &= \frac{\theta g_{B_3}}{g_{A_3}+\theta g_{B_3}} \end{cases}$$

La función de pagos("payoff") del equipo A en la etapa i-ésima la denotamos por π_{A_i} mientras que la del equipo B en esa misma etapa i-ésima la denotamos por π_{B_i}. A esta notación será necesario añadirle un superíndice en la segunda etapa para distinguir los dos casos que se pueden dar en el partido de ida. Denotaremos por $\pi_{A_2}^V$ la función de pagos del equipo A en el segundo partido en el caso de que haya ganado el primer partido y por $\pi_{A_2}^D$ en el caso de que haya perdido.

Haciendo esto mismo con B tendremos que $\pi_{B_2}^V$ será la función de pagos del equipo B en el segundo partido en el caso de que haya ganado el primer partido y $\pi_{B_2}^D$ en el caso de que haya perdido.

Puesto que las funciones de pagos de los equipos de la etapa 1 van a depender de las funciones de pagos de la etapa 2 y éstas, a su vez, de las funciones de pagos de la etapa 3, las vamos a definir en la siguiente sección en la que resolveremos el juego.

3. Resultados

Al tratarse de un "contest" dinámico con varias etapas, el concepto de equilibrio que usaremos para resolver el juego es inducción hacia atrás("backward induction"). Por tanto, empezaremos analizando la prórroga, continuaremos con el partido de vuelta y terminaremos con el partido de ida.

3.1. Prórroga

Si llegamos a la prórroga, llegamos de manera simétrica en lo que al marcador global se refiere, ya que los dos equipos están empatados, pero esta parte del juego no es simétrica porque se juega en el campo de B, lo que le otorga a este equipo ventajas por jugar como local de las que no dispone el equipo A que juega de visitante.

Que se juegue la prórroga significa con el modelo que estamos trabajando que se ha producido la victoria de un equipo en el partido de ida y del otro en el partido de vuelta. En esta etapa uno de los dos equipos ganará y se convertirá en el vencedor de la eliminatoria, ya que será el que más goles haya conseguido en el marcador global, puesto que al inicio de esta etapa el marcador global refleja un empate.

La función de pagos del equipo A en la prórroga será igual a la probabilidad de que A gane la prórroga por el valor del premio de ganar la eliminatoria que hemos supuesto para simplificar los cálculos que es igual a uno ($V = 1$) menos el coste del esfuerzo que realiza A en esta última etapa, que suponemos que es lineal con coste marginal igual a 1. En nuestro modelo vamos a suponer que el coste del esfuerzo es lineal con coste marginal igual a uno para los dos equipos en todas las etapas.

Siguiendo el mismo razonamiento con el equipo B tenemos que las funciones de pagos de los dos equipos son:

$$\left\{\begin{array}{lllll} \pi_{A_3} & = & p_{A_3}V - g_{A_3} & = & \frac{g_{A_3}}{g_{A_3}+\theta g_{B_3}} - g_{A_3} \\ \\ \pi_{B_3} & = & p_{B_3}V - g_{B_3} & = & \frac{\theta g_{B_3}}{g_{A_3}+\theta g_{B_3}} - g_{B_3} \end{array}\right.$$

Al ser p_{A_3} y p_{B_3} las probabilidades de ganar definidas por la Tullock para dos jugadores con una asimetría en el esfuerzo de B reflejada por la constante θ, se comprueba de forma inmediata que π_{A_3} es cóncava respecto de g_{A_3}, $\forall g_{B_3} \in [0, V]$, y que π_{B_3} es cóncava respecto de g_{B_3}, $\forall g_{A_3} \in [0, V]$, por lo que podemos usar las condiciones de primer orden para hallar los esfuerzos en el equilibrio, $g^*_{A_3}$ y $g^*_{B_3}$, y las funciones de pagos de esos esfuerzos, $\pi^*_{A_3}$ y

$\pi^*_{B_3}$, de esta tercera etapa. Entonces tenemos que:

$$\frac{\partial \pi_{A_3}}{\partial g_{A_3}} = \frac{g_{A_3} + \theta g_{B_3} - g_{A_3}}{\left(g_{A_3} + \theta g_{B_3}\right)^2} - 1 = \frac{\theta g_{B_3}}{\left(g_{A_3} + \theta g_{B_3}\right)^2} - 1 = 0$$

$$\theta g_{B_3} = \left(g_{A_3} + \theta g_{B_3}\right)^2 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \pi_{B_3}}{\partial g_{B_3}} = \frac{\theta\left(g_{A_3} + \theta g_{B_3}\right) - \theta^2 g_{B_3}}{\left(g_{A_3} + \theta g_{B_3}\right)^2} - 1 = \frac{\theta g_{A_3}}{\left(g_{A_3} + \theta g_{B_3}\right)^2} - 1 = 0$$

$$\theta g_{A_3} = \left(g_{A_3} + \theta g_{B_3}\right)^2 \tag{2}$$

$$(1)\text{ y }(2) \Rightarrow g^*_{A_3} = g^*_{B_3}$$

Por tanto:

$$\theta g_{B_3} = \left(g_{A_3} + \theta g_{B_3}\right)^2 = \left(g_{B_3} + \theta g_{B_3}\right)^2 = (1+\theta)^2 g^2_{B_3}$$

Y entonces:

$$g^*_{A_3} = g^*_{B_3} = \frac{\theta}{(1+\theta)^2}$$

Sustituyendo en π_{A_3} y π_{B_3} se tiene que:

$$\pi^*_{A_3} = \frac{\frac{\theta}{(1+\theta)^2}}{\frac{\theta+\theta^2}{(1+\theta)^2}} - \frac{\theta}{(1+\theta)^2} = \frac{1}{1+\theta} - \frac{\theta}{(1+\theta)^2} = \frac{1}{(1+\theta)^2}$$

$$\pi^*_{B_3} = \frac{\frac{\theta^2}{(1+\theta)^2}}{\frac{\theta+\theta^2}{(1+\theta)^2}} - \frac{\theta}{(1+\theta)^2} = \frac{\theta}{1+\theta} - \frac{\theta}{(1+\theta)^2} = \frac{\theta^2}{(1+\theta)^2}$$

Como podemos observar, en la prórroga ambos equipos realizarán el mismo esfuerzo en el equilibrio. Si jugar en campo propio no otorgara ninguna ventaja, es decir, si $\theta = 1$, tendríamos que la función de pagos de los dos equipos sería la misma. Sin embargo, si consideramos que el equipo local tiene ventajas por jugar en su estadio, es decir si $\theta > 1$, entonces la función de pagos del equipo B que es el que juega la prórroga en casa será mayor que la función de pagos del equipo A.

Proposición 3.1 *En el equilibrio, el equipo local, en este caso B, si consideramos que jugar en campo propio otorga ventajas, tendrá una probabilidad mayor de ganar la prórroga que el equipo visitante, en este caso A, mientras que si consideramos que el factor campo no tiene influencia, las probabilidades de ganar de los equipos en el equilibrio serán iguales.*

Demostración. Sustituyendo los esfuerzos en el equilibrio de los equipos que hemos obtenido anteriormente tenemos que:

$$p^*_{A_3} = \frac{g^*_{A_3}}{g^*_{A_3}+\theta g^*_{B_3}} = \frac{\frac{\theta}{(1+\theta)^2}}{\frac{\theta}{(1+\theta)^2}+\theta\frac{\theta}{(1+\theta)^2}} = \frac{1}{1+\theta}$$

$$p^*_{B_3} = \frac{\theta g^*_{B_3}}{g^*_{A_3}+\theta g^*_{B_3}} = \frac{\theta\frac{\theta}{(1+\theta)^2}}{\frac{\theta}{(1+\theta)^2}+\theta\frac{\theta}{(1+\theta)^2}} = \frac{\theta}{1+\theta}$$

Si jugar en campo propio concede ventajas al equipo local, es decir, si $\theta > 1$, tenemos que:

$$p^*_{B_3} > p^*_{A_3} \Leftrightarrow \frac{\theta}{1+\theta} > \frac{1}{1+\theta} \Leftrightarrow \theta > 1$$

Por tanto, el equipo local tendría una mayor probabilidad de ganar. Si consideramos que el estadio en el que se juegue el partido no influye en el resultado, es decir, si $\theta = 1$, entonces los dos equipos tendrán la misma probabilidad de ganar:

$$p^*_{A_3} = p^*_{B_3} = \frac{1}{2}$$

$\blacksquare$

3.2. Partido de vuelta

Esta etapa, al igual que la prórroga, también se va a disputar en el estadio del equipo B, por lo que va a ser este conjunto el que siga contando con las ventajas de jugar en el campo propio. La principal diferencia que vamos a encontrar en esta etapa con respecto a la prórroga va a ser la influencia de lo que ha pasado en el primer partido para calcular en el equilibrio los esfuerzos, las probabilidades de ganar y las funciones de pagos, ya que en la prórroga eran independientes de lo que había ocurrido tanto en el primer como en el segundo partido.

Como la función de pagos de los equipos va a depender de lo que haya sucedido en el partido de ida, habrá que tener en cuenta los dos posibles resultados que pueden ocurrir en el primer partido (victoria de A o victoria de B) para definirlas.

Por ejemplo, si el primer partido partido lo ha ganado el equipo A, una nueva victoria de A en el segundo partido hará que se convierta en el ganador de la eliminatoria, mientras que si el primer partido ha acabado en derrota para A, únicamente una victoria de A le permitiría optar a ganar la eliminatoria en la prórroga, no podría ganarla en el segundo partido. Por tanto, la función de pagos será diferente dependiendo del caso en el que nos encontremos.

3.2.1. Victoria de A en el partido de ida

Teniendo en cuenta que en nuestro modelo hemos considerado que si gana el equipo local un partido lo hace por 1-0 y si gana el equipo visitante lo hace por 0-1, en este caso el partido de vuelta empieza con 1-0 a favor de A en el marcador global.

Entonces una nueva victoria de A en este partido lo convertiría en el vencedor de la eliminatoria ya que el marcador global sería de 2-0. En cambio, una victoria de B daría lugar a la prórroga puesto que tendríamos un empate a 1 en el marcador global.

Para definir las funciones de pagos de los dos equipos, tenemos que tener presente que para cada equipo el premio por ganar o perder varía, ya que por ejemplo si gana A vence en la eliminatoria y se lleva V, que era el premio por ganar la eliminatoria, mientras que si gana B como fuerza la prórroga su pago será el pago esperado en la continuación del juego, en este caso, el pago esperado en la prórroga.

Por tanto, la función de pagos del equipo A va a ser igual a la probabilidad de ganar el partido de vuelta por el premio de ganar la eliminatoria que es $V = 1$, más la probabilidad de perder, que es la probabilidad de que gane B, por el pago esperado en la prórroga, ya que si pierde se jugaría la tercera etapa, menos el coste del esfuerzo que realice en este partido.

La función de pagos del equipo B va a ser igual a la probabilidad de ganar el partido por el pago esperado en la prórroga menos el coste del esfuerzo que realice. Como si B pierde este segundo partido pierde la eliminatoria, no obtendría ningún premio, por lo que no consideramos esta probabilidad.

Con todo esto tenemos que las funciones de pagos que en este caso llevan el superíndice V para A denotando que ha ganado el partido de ida y D para B denotando que lo ha perdido son:

$$\begin{cases} \pi^V_{A_2} & = & p_{A_2}V + p_{B_2}\pi_{A_3} - g_{A_2} & = & \frac{g_{A_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}} \cdot 1 + \frac{\theta g_{B_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}} \cdot \pi_{A_3} - g_{A_2} \\ \\ \pi^D_{B_2} & = & p_{B_2}\pi_{B_3} - g_{B_2} & = & \frac{\theta g_{B_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}}\pi_{B_3} - g_{B_2} \end{cases} \tag{3}$$

Para hallar los esfuerzos en el equilibrio y la función de pagos de estos esfuerzos sustituimos en (3) los pagos esperados en la prórroga en el equilibrio. De esta forma nos quedan las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \pi^V_{A_2} &= \frac{g_{A_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}} + \frac{\theta g_{B_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}} \cdot \frac{1}{(1+\theta)^2} - g_{A_2} \\ \\ \pi^D_{B_2} &= \frac{\theta g_{B_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}} \cdot \frac{\theta^2}{(1+\theta)^2} - g_{B_2} \end{aligned} \tag{4}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que con las funciones de pagos en la prórroga, al ser p_{A_2} y p_{B_2} las probabilidades de ganar definidas por la Tullock para dos jugadores con una asimetría en el esfuerzo de B reflejada por la constante θ, se comprueba de forma inmediata que son funciones cóncavas respecto de g_{A_2}, $\forall g_{B_2} \in [0, V]$ en el caso de p_{A_2}, y respecto de g_{B_2}, $\forall g_{A_2} \in [0, V]$, en el caso de p_{B_2}, al igual que también se comprueba de forma inmediata que p_{B_2} es cóncava respecto de g_{A_2}, $\forall g_{B_2} \in [0, V]$.

Como una función cóncava por una constante positiva sigue siendo cóncava y la suma de funciones cóncavas es cóncava, tenemos que π_{A_2} es cóncava respecto de g_{A_2}, $\forall g_{B_2} \in [0, V]$, y que π_{B_2} es cóncava respecto de g_{B_2}, $\forall g_{A_2} \in [0, V]$.

Usando las condiciones de primer orden tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi^V_{A_2}}{\partial g_{A_2}} &= \frac{g_{A_2}+\theta g_{B_2}-g_{A_2}}{\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2} - \frac{\theta g_{B_2}}{\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2} \cdot \frac{1}{(1+\theta)^2} - 1 \\ \\ &= \frac{\theta g_{B_2}}{\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2} - \frac{\theta g_{B_2}}{\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2(1+\theta)^2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\left(g_{A_2} + \theta g_{B_2}\right)^2 = \theta g_{B_2} - \frac{\theta g_{B_2}}{(1+\theta)^2} = \frac{\theta\left(\theta^2 + 2\theta\right) g_{B_2}}{(1+\theta)^2} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi^D_{B_2}}{\partial g_{B_2}} &= \tfrac{\theta\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)-\theta^2 g_{B_2}}{\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2} \cdot \tfrac{\theta^2}{(1+\theta)^2} - 1 \\ &= \tfrac{\theta g_{A_2}}{\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2} \cdot \tfrac{\theta^2}{(1+\theta)^2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\left(g_{A_2} + \theta g_{B_2}\right)^2 = \theta g_{A_2} \cdot \frac{\theta^2}{(1+\theta)^2} \tag{6}$$

$$(5)\, y\, (6) \Rightarrow \frac{\theta^2\,(\theta+2)\, g_{B_2}}{(1+\theta)^2} = \cdot \frac{\theta^3 g_{A_2}}{(1+\theta)^2} \Rightarrow g^*_{A_2} = \frac{\theta+2}{\theta} g^*_{B_2} \tag{7}$$

Sustituyendo en (6) tenemos que:

$$g^2_{B_2}\left(\frac{\theta^2+\theta+2}{\theta}\right)^2 = \frac{\theta^3 \frac{\theta+2}{\theta} g_{B_2}}{(1+\theta)^2}$$

Despejando g_{B_2} y sustituyendo en (7) obtenemos los esfuerzos de los dos equipos en equilibrio:

$$\begin{cases} g^*_{A_2} &= \frac{\theta^3(\theta+2)^2}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2} \\ \\ g^*_{B_2} &= \frac{\theta^4(\theta+2)}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2} \end{cases}$$

Sustituyendo en $\pi^V_{A_2}$ y $\pi^D_{B_2}$ obtenemos las funciones de pagos en el equilibrio:

$$\begin{aligned} \pi^{V*}_{A_2} &= \tfrac{\frac{\theta^3(\theta+2)^2}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}}{\frac{\theta^3(\theta+2)^2}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}+\theta\frac{\theta^4(\theta+2)}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}} + \tfrac{\theta\frac{\theta^4(\theta+2)}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}}{\frac{\theta^3(\theta+2)^2}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}+\theta\frac{\theta^4(\theta+2)}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}} \cdot \tfrac{1}{(1+\theta)^2} - \tfrac{\theta^3(\theta+2)^2}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2} \\ &= \tfrac{\theta+2}{\theta^2+\theta+2} + \tfrac{\theta^2}{(\theta^2+\theta+2)(1+\theta)^2} - \tfrac{\theta^3(\theta+2)^2}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2} \\ \pi^{D*}_{B_2} &= \tfrac{\theta\frac{\theta^4(\theta+2)}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}}{\frac{\theta^3(\theta+2)^2}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}+\theta\frac{\theta^4(\theta+2)}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}} \cdot \tfrac{\theta^2}{(1+\theta)^2} - \tfrac{\theta^4(\theta+2)}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2} \\ &= \tfrac{\theta^4}{(\theta^2+\theta+2)(1+\theta)^2} - \tfrac{\theta^4(\theta+2)}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2} = \tfrac{\theta^4\left(\theta^2+\theta+2\right)-\theta^4(\theta+2)}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2} = \tfrac{\theta^6}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2} \end{aligned}$$

Proposición 3.2 *El efecto de desaliento por haber perdido el primer partido es más influyente en los esfuerzos en el equilibrio del partido de vuelta que las ventajas que ofrece jugar en campo propio.*

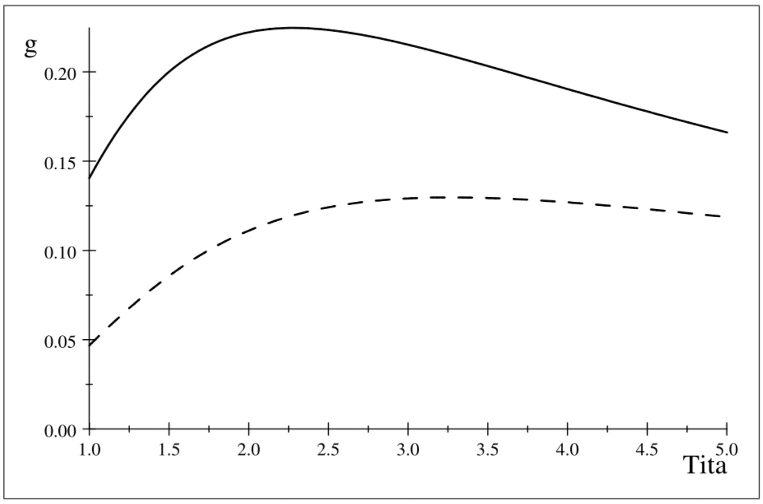
Demostración. Vemos que $\forall\theta \geq 1$, el esfuerzo del equipo A en el equilibrio es mayor que el esfuerzo del equipo B, ya que:

$$g^*_{A_2} \geq g^*_{B_2} \Leftrightarrow \frac{\theta^3 (\theta+2)^2}{(\theta^2+\theta+2)^2 (1+\theta)^2} \geq \frac{\theta^4 (\theta+2)}{(\theta^2+\theta+2)^2 (1+\theta)^2} \Leftrightarrow \theta + 2 \geq \theta \Leftrightarrow 2 \geq 0$$

■

A continuación mostramos una gráfica de los esfuerzos de los equipos en el equilibrio en función de θ. Haremos lo mismo con las probabilidades de ganar y los pagos y así podremos apreciar gráficamente cómo varían al ir aumentando el valor de θ, partiendo del caso simétrico en el que no hay ventajas por jugar como local que se da con $\theta = 1$. Esto mismo haremos en el partido de ida y en el otro caso que se puede dar en el partido de vuelta, es decir, el caso en el que B ha ganado el partido de ida.

La notación que se va a seguir en las gráficas que van a aparecer va a ser la siguiente: la línea continua va a representar el esfuerzo, la probabilidad de ganar o el pago del equipo A, dependiendo de lo que se represente en cada caso, de la misma forma que la línea discontinua va a representar el esfuerzo, la probabilidad de ganar o el pago del equipo B.



Gráfica 1: Esfuerzos en el partido de vuelta cuando A gana el partido de ida

En la gráfica se puede apreciar como efectivamente el esfuerzo de A va a ser siempre mayor que el de B independientemente del valor de θ. Con $\theta = 1$, no habría ventajas por jugar como local, por lo que el único efecto que se apreciaría sería el efecto de desaliento. El equipo A hace más esfuerzo porque al haber ganado el partido de ida si gana el partido de vuelta gana la eliminatoria, mientras que el equipo B al haber perdido el primer partido tendría que ganar el segundo y la prórroga para poder vencer en la eliminatoria.

A medida que aumenta θ, A aumenta su esfuerzo para compensar este efecto que causan las ventajas de jugar como local, lo que provoca que B también aumente el suyo para compensar el aumento de A, hasta que llega un punto en el que las ventajas de jugar como local son tantas al aumentar el valor de θ que A disminuye su esfuerzo y aunque sigue siendo superior al que realiza B, la distancia entre ambos se reduce.

Vamos a ver que dependiendo de las ventajas que ofrezca jugar en campo propio al equipo local, la probabilidad de ganar el partido del equipo B será mayor, menor o igual a la probabilidad de ganar el partido del equipo A.

Proposición 3.3 *Existe un $\overline{\theta} \geq 1$ que hace que las probabilidades de ganar de los dos equipos sean iguales. Si $\theta > \overline{\theta}$, la probabilidad de ganar del equipo B será mayor que la probabilidad de ganar del equipo A, mientras que si $\theta < \overline{\theta}$, la probabilidad de ganar del equipo A será mayor que la probabilidad de ganar del equipo B.*

Demostración. Las probabilidades de ganar de los dos equipos en el equilibrio son:

$$p^*_{A_2} = \frac{g^*_{A_2}}{g^*_{A_2}+\theta g^*_{B_2}} = \frac{\frac{\theta^3(\theta+2)^2}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}}{\frac{\theta^3(\theta+2)^2}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}+\theta\frac{\theta^4(\theta+2)}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}} = \frac{\theta+2}{\theta^2+\theta+2}$$

$$p^*_{B_2} = \frac{\theta g^*_{B_2}}{g^*_{A_2}+\theta g^*_{B_2}} = \frac{\theta\frac{\theta^4(\theta+2)}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}}{\frac{\theta^3(\theta+2)^2}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}+\theta\frac{\theta^4(\theta+2)}{(\theta^2+\theta+2)^2(1+\theta)^2}} = \frac{\theta^2}{\theta^2+\theta+2}$$

Entonces tenemos que:

$$p^*_{A_2} = p^*_{B_2} \Leftrightarrow \frac{\theta+2}{\theta^2+\theta+2} = \frac{\theta^2}{\theta^2+\theta+2} \Leftrightarrow \theta^2 - \theta - 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se tiene que para $\theta = -1$ y para $\theta = 2$ se da la igualdad y, por tanto, hemos encontrado el $\overline{\theta} \geq 1$ para el que las probabilidades de ganar de los dos equipos son iguales. Si $\theta = \overline{\theta} = 2$, tenemos que:

$$p^*_{A_2} = p^*_{B_2} = \frac{1}{2}$$

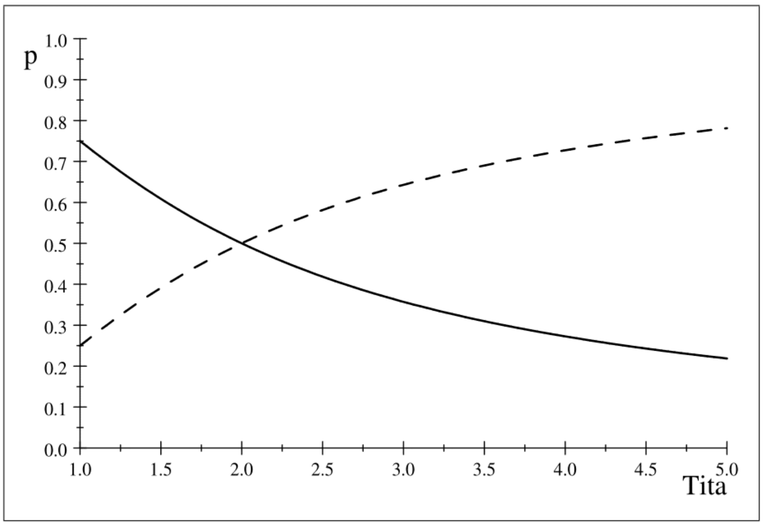
Para $\theta > 2$ se tiene que $\theta^2 > \theta + 2$ por lo que la probabilidad de ganar el partido del equipo B será mayor que la del equipo A, mientras que para $\theta \in [1, 2)$, se tiene que

$\theta^2 < \theta + 2$, por lo que la probabilidad de ganar el partido del equipo A será mayor que la del equipo B.

■

Este resultado nos permite ver que existe un valor de θ a partir del cual la influencia de jugar en el campo propio es mayor que la influencia de lo ocurrido en el primer partido, ya que a partir de ese θ, aunque el equipo local haya perdido en el partido de ida y haga menos esfuerzo en el partido de vuelta que el equipo visitante por el efecto de desaliento, su probabilidad de ganar el partido va a ser mayor.

Esto se puede ver en la siguiente gráfica, en la que además se aprecia el punto de intersección entre las dos funciones de probabilidad y que analíticamente habíamos calculado previamente que tenía lugar con $\theta = 2$.



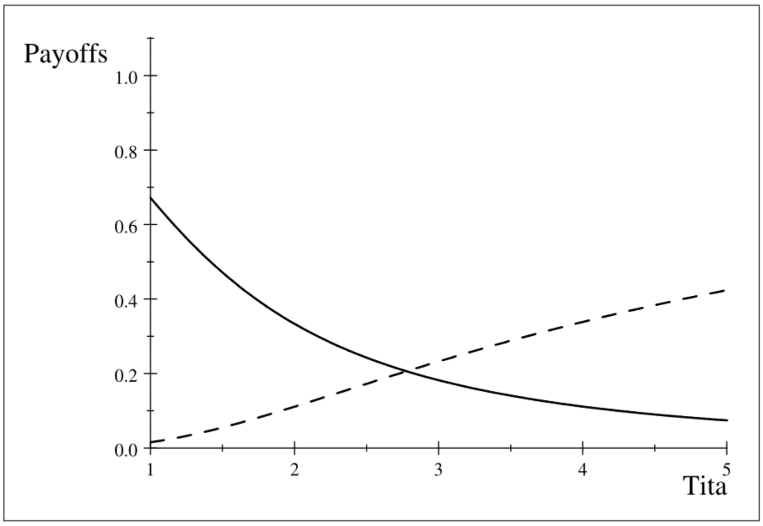
Gráfica 2: Probabilidad de ganar en el partido de vuelta cuando A gana el partido de ida

Entonces podemos afirmar que las ventajas que concede jugar como local tienen una gran relevancia en el resultado del partido, ya que determinando su valor cuantitativo mediante un parámetro θ vemos como varían las probabilidades de ganar de los equipos en función del valor que tienen, hasta tal punto que dependiendo de si θ es mayor, menor o igual que un valor, un equipo tiene mayor, menor o igual probabilidad de ganar el partido que su rival.

En los pagos de ambos equipos también va a tener una gran influencia el valor de θ, como se va a poder ver en la siguiente gráfica. Con $\theta = 1$, es decir, el caso en el que el lugar donde se dispute el partido es irrelevante en el resultado, se observa como el haber ganado el primer partido hace que el pago esperado de A sea muy alto, ya que es cercano a 0,7, mientras que el pago esperado de B es cercano a 0.

Se observa como el pago de A es decreciente en θ, ya que la probabilidad de ganar de A disminuye a medida que aumenta θ, y el pago de B es creciente en θ, ya que su probabilidad de ganar crece a medida que aumenta el valor de θ.

Gráficamente se ve como existe un valor de θ para el cual los pagos de los dos equipos son iguales, y a partir de ese valor el pago de B es superior al pago de A. Ese valor es diferente de 2 que era el valor para el cual las probabilidades de ganar de ambos equipos eran iguales.



Gráfica 3: Pagos en el partido de vuelta cuando A gana el partido de ida

3.2.2. Victoria de B en el partido de ida

En este caso el partido de vuelta empieza con 0-1 a favor de B en el marcador global. Entonces una nueva victoria de B en este partido lo convertiría en el vencedor de la eliminatoria, puesto que el marcador global sería de 0-2, mientras que una victoria de A daría lugar a la prórroga puesto que tendríamos un empate a 1 en el marcador global.

Se trata de un caso similar al de la victoria de A en el primer partido, ya que ahora el equipo B está en la situación que antes estaba el equipo A y viceversa, por lo que la función de pagos de A va a tener la misma estructura que tenía la función de pagos de B y la de B va a tener la misma estructura que tenía la de A.

La principal diferencia con el caso anterior va a consistir en que el equipo B va a tener a su favor también el hecho de haber ganado el primer partido además de las ventajas de jugar como local el segundo partido, ya que en el otro caso tenía las ventajas de jugar en su estadio pero el equipo A tenía a su favor el haber ganado el primer partido.

La función de pagos del equipo A va a ser igual a la probabilidad de ganar el partido por el pago esperado en la prórroga menos el coste del esfuerzo que realice, mientras que la función de pagos del equipo B va a ser igual a la probabilidad de ganar el partido por el premio de ganar la eliminatoria que es $V = 1$, más la probabilidad de perder, que es la probabilidad de que gane A, por el pago esperado en la prórroga menos el coste del esfuerzo que realice en este partido.

Con todo esto tenemos que las funciones de pagos que en este caso llevan el superíndice D para A denotando que ha sido derrotado en el partido de ida y V para B denotando que ha vencido en el primer partido son:

$$\begin{cases} \pi_{A_2}^D = p_{A_2}\pi_{A_3} - g_{A_2} = \frac{g_{A_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}}\pi_{A_3} - g_{A_2} \\ \pi_{B_2}^V = p_{B_2}V + p_{A_2}\pi_{B_3} - g_{B_2} = \frac{\theta g_{B_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}} \cdot 1 + \frac{g_{A_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}} \cdot \pi_{B_3} - g_{B_2} \end{cases} \tag{8}$$

Como hemos hecho en el otro caso, para hallar los esfuerzos en el equilibrio y la función de pagos de estos esfuerzos sustituimos en (8) los pagos esperados en la prórroga en el equilibrio. De esta forma nos quedan las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \pi_{A_2}^D &= \frac{g_{A_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}} \cdot \frac{1}{(1+\theta)^2} - g_{A_2} \\ \pi_{B_2}^V &= \frac{\theta g_{B_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}} + \frac{g_{A_2}}{g_{A_2}+\theta g_{B_2}} \cdot \frac{\theta^2}{(1+\theta)^2} - g_{B_2} \end{aligned} \tag{9}$$

Aplicando el mismo razonamiento que hemos utilizado con las funciones de pagos del caso en el que A gana el primer partido, tenemos que las dos funciones definidas en (9) son cóncavas respecto de g_{A_2} en el caso de $\pi_{A_2}^D$ y respecto de g_{B_2} en el caso de $\pi_{B_2}^V$ y, entonces, usando las condiciones de primer orden tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_{A_2}^D}{\partial g_{A_2}} &= \frac{g_{A_2}+\theta g_{B_2}-g_{A_2}}{\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2} \cdot \frac{1}{(1+\theta)^2} - 1 \\ &= \frac{\theta g_{B_2}}{\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2(1+\theta)^2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2=\frac{\theta g_{B_2}}{\left(1+\theta\right)^2} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_{B_2}^{V}}{\partial g_{B_2}} &= \frac{\theta\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)-\theta^2 g_{B_2}}{\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2}-\frac{\theta g_{A_2}}{\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2}\cdot\frac{\theta^2}{\left(1+\theta\right)^2}-1 \\
&= \frac{\theta g_{A_2}}{\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2}-\frac{\theta g_{A_2}}{\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2}\cdot\frac{\theta^2}{\left(1+\theta\right)^2}-1=0
\end{aligned}$$

$$\left(g_{A_2}+\theta g_{B_2}\right)^2=\frac{\theta\left(2\theta+1\right)g_{A_2}}{\left(1+\theta\right)^2} \tag{11}$$

$$(10)\,y\,(11)\Rightarrow\frac{\theta g_{B_2}}{\left(1+\theta\right)^2}=\frac{\theta\left(2\theta+1\right)g_{A_2}}{\left(1+\theta\right)^2}\Rightarrow g_{B_2}^{*}=\left(2\theta+1\right)g_{A_2}^{*} \tag{12}$$

Sustituyendo en (11) tenemos que:

$$g_{A_2}^2\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2=\frac{\theta\left(2\theta+1\right)g_{A_2}}{\left(1+\theta\right)^2}$$

Despejando g_{A_2} y sustituyendo en (12) obtenemos los esfuerzos de los dos equipos en equilibrio:

$$\begin{cases} g_{A_2}^{*} &= \frac{\theta(2\theta+1)}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2} \\ \\ g_{B_2}^{*} &= \frac{\theta(2\theta+1)^2}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2} \end{cases}$$

Sustituyendo en $\pi_{A_2}^{V}$ y $\pi_{B_2}^{D}$ obtenemos las funciones de pagos en el equilibrio:

$$\begin{aligned}
\pi_{A_2}^{D*} &= \frac{\frac{\theta(2\theta+1)}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}}{\frac{\theta(2\theta+1)}{\left(2\theta^2+\theta+\right)^2(1+\theta)^2}+\theta\frac{\theta(2\theta+1)^2}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}}\cdot\frac{1}{(1+\theta)^2}-\frac{\theta(2\theta+1)}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2} \\
&= \frac{1}{(2\theta^2+\theta+1)(1+\theta)^2}-\frac{\theta(2\theta+1)}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}=\frac{1}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{B_2}^{V*} &= \frac{\theta\frac{\theta(2\theta+1)^2}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}}{\frac{\theta(2\theta+1)}{\left(2\theta^2+\theta+\right)^2(1+\theta)^2}+\theta\frac{\theta(2\theta+1)^2}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}}+\frac{\frac{\theta(2\theta+1)}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}}{\frac{\theta(2\theta+1)}{\left(2\theta^2+\theta+\right)^2(1+\theta)^2}+\theta\frac{\theta(2\theta+1)^2}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}}\cdot\frac{\theta^2}{(1+\theta)^2}-\frac{\theta(2\theta+1)^2}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2} \\
&= \frac{\theta(2\theta+1)}{2\theta^2+\theta+1}+\frac{\theta^2}{(2\theta^2+\theta+1)(1+\theta)^2}-\frac{\theta(2\theta+1)^2}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}
\end{aligned}$$

Proposición 3.4 *El efecto de desaliento para A por haber perdido el primer partido más las ventajas de B por jugar como local hacen que el esfuerzo de B sea mayor que el esfuerzo de A, $\forall\theta \geq 1$.*

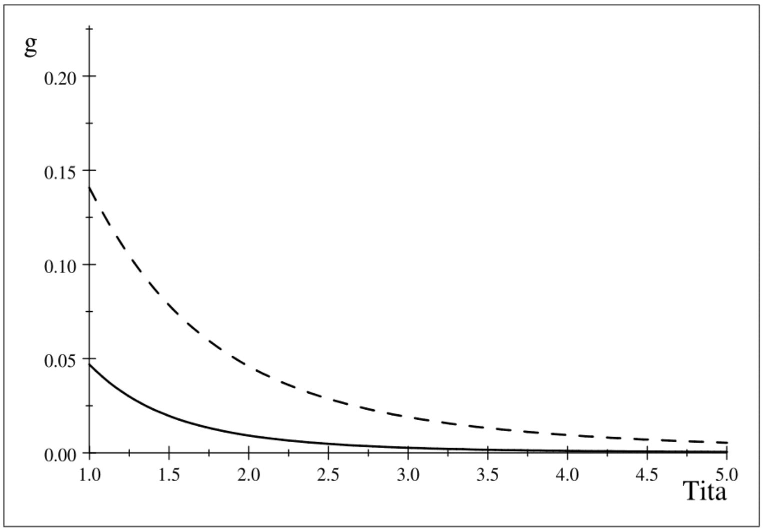
Demostración.

$$g^*_{B_2} > g^*_{A_2} \Leftrightarrow \frac{\theta\,(2\theta+1)^2}{(2\theta^2+\theta+1)^2\,(1+\theta)^2} > \frac{\theta\,(2\theta+1)}{(2\theta^2+\theta+1)^2\,(1+\theta)^2} \Leftrightarrow 2\theta+1>1 \Leftrightarrow \theta>0$$

■

En la gráfica que aparece a continuación vemos como cuando $\theta = 1$, es decir, en el caso en el que jugar como local no otorga ninguna ventaja, el esfuerzo de B ya es mayor que el de A, puesto que al haber perdido A el partido de ida tendría que ganar las dos siguientes etapas del juego para poder ganar la eliminatoria, por lo que sufre el efecto de desaliento.

Los esfuerzos de los dos equipos son decrecientes en θ, debido a que a medida que aumenta θ, B tiene muchas ventajas por jugar como local y haber ganado el primer partido por lo que A reduce su esfuerzo, ya que ve muy difícil contrarrestar estas ventajas y B también reduce el suyo, dado que al tener tantos aspectos a su favor considera que no necesita emplear mucho esfuerzo para vencer.



Gráfica 4: Esfuerzos en el partido de vuelta cuando B gana el partido de ida

Proposición 3.5 *La probabilidad de ganar el partido de B en el equilibrio va a ser mayor que la de A, $\forall\theta \geq 1$.*

Demostración. Las probabilidades de ganar de los equipos en el equilibrio son:

$$p^*_{A_2} = \frac{g^*_{A_2}}{g^*_{A_2}+\theta g^*_{B_3}} = \frac{\frac{\theta(2\theta+1)}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}}{\frac{\theta(2\theta+1)}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}+\theta\frac{\theta(2\theta+1)^2}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}} = \frac{1}{2\theta^2+\theta+1}$$

$$p^*_{B_2} = \frac{\theta g^*_{B_2}}{g^*_{A_2}+\theta g^*_{B_3}} = \frac{\frac{\theta^2(2\theta+1)^2}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}}{\frac{\theta(2\theta+1)}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}+\theta\frac{\theta(2\theta+1)^2}{\left(2\theta^2+\theta+1\right)^2(1+\theta)^2}} = \frac{\theta(2\theta+1)}{2\theta^2+\theta+1}$$

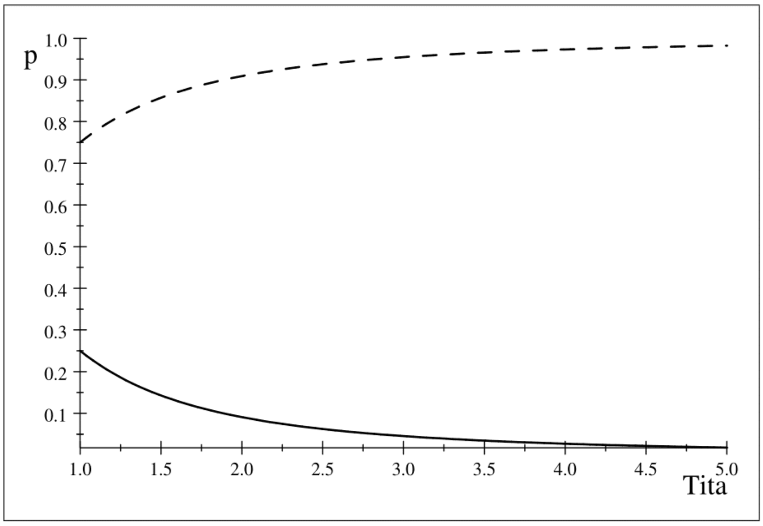
Entonces tenemos que:

$$p^*_{B_2} > p^*_{A_2} \Leftrightarrow \frac{\theta\,(2\theta+1)}{2\theta^2+\theta+1} > \frac{1}{2\theta^2+\theta+1} \Leftrightarrow \theta\,(2\theta+1) > 1$$

Como esto es cierto $\forall\theta \geq 1$, la prueba se da por concluida.

■

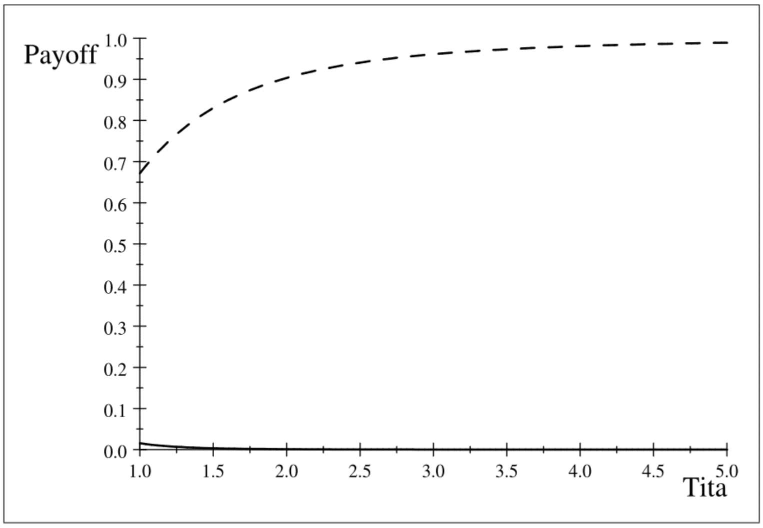
En la siguiente gráfica vemos como ya con $\theta = 1$, el efecto de desaliento hace que la probabilidad de ganar de B sea mayor que la de A, puesto que B tiene una probabilidad de ganar de 0,75 y A tiene una probabilidad de ganar de 0,25.



Gráfica 5: Probabilidad de ganar en el partido de vuelta cuando B gana el partido de ida

La probabilidad de ganar de B es creciente en θ mientras que la probabilidad de ganar de A es decreciente en θ, de manera que la diferencia entre ambas crece al aumentar el valor de θ. Esto se debe a que a medida que las ventajas por jugar como local aumentan y se unen al hecho de haber ganado el primer partido y sólo tener que ganar este segundo para vencer en la eliminatoria, B tiene mucho más fácil ganar este partido que A, que ve como tiene más difícil ganar el partido a medida que crecen las ventajas de su rival y se unen al hecho de que al haber perdido el primer partido tiene que ganar el segundo y la prórroga para poder ganar la eliminatoria.

Los pagos de los dos equipos van a seguir la misma tendencia que las probabilidades de ganar. Con $\theta = 1$, el pago de B va a ser mayor que el de A, que va a ser muy bajo, debido al efecto de desaliento. A medida que el valor de θ aumente, las ventajas de B por jugar en el estadio propio crecerán y se unirán al efecto de desaliento, por lo que el pago de B aumentará mientras que el pago de A disminuirá. Todo esto se puede apreciar en la siguiente gráfica.



Gráfica 6: Pagos en el partido de vuelta cuando B gana el partido de ida

3.3. Partido de ida

Esta etapa, a diferencia del partido de vuelta y de la prórroga, se va a disputar en el estadio de A, por lo que en este partido va a ser el equipo A el que cuente con las ventajas de jugar como local. Por tanto en este partido θ aparecerá multiplicando el esfuerzo que haga A.

La función de pagos de A va a ser igual a la probabilidad de que A gane el partido por el pago esperado en el partido de vuelta en el caso en el que A gana el primer partido más la probabilidad de que A pierda, que es la probabilidad de que B gane, por el pago esperado en el partido de vuelta en el caso en el que B gana el primer partido menos el coste del esfuerzo que realiza A en este partido.

Siguiendo el mismo razonamiento para la función de pagos de B, tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \pi_{A_1} & = & \frac{\theta g_{A_1}}{\theta g_{A_1}+g_{B_1}} \cdot \pi_{A_2}^V + \frac{g_{B_1}}{\theta g_{A_1}+g_{B_1}} \cdot \pi_{A_2}^D - g_{A_1} \\ \\ \pi_{B_1} & = & \frac{g_{B_1}}{\theta g_{A_1}+g_{B_1}} \cdot \pi_{B_2}^V + \frac{\theta g_{A_1}}{\theta g_{A_1}+g_{B_1}} \cdot \pi_{B_2}^D - g_{B_1} \end{array}\right. \tag{13}$$

Para simplificar los cálculos no vamos a sustituir en (13) los pagos esperados en el equilibrio en el partido de vuelta, sino que calcularemos los esfuerzos, las probabilidades de ganar y los pagos en el primer partido en el equilibrio en función de $\pi_{A_2}^{V^*}$, $\pi_{A_2}^{D^*}$, $\pi_{B_2}^{V^*}$ y $\pi_{B_2}^{D^*}$.

Usando el mismo razonamiento que hemos seguido en el partido de vuelta, ya que se trata de funciones similares sólo que en este caso θ multiplica el esfuerzo que realiza A y no B y la constante positiva por la que se multiplican las funciones de probabilidad cambia pero sin afectar a la concavidad, se comprueba de forma inmediata que π_{A_1} es cóncava respecto de g_{A_1}, $\forall g_{B_1} \in [0, V]$, y que π_{B_1} es cóncava respecto de g_{B_1}, $\forall g_{A_1} \in [0, V]$.

Usando las condiciones de primer orden tenemos que:

$$\begin{array}{lcl} \frac{\partial \pi_{A_1}}{\partial g_{A_1}} & = & \frac{\theta\left(\theta g_{A_1}+g_{B_1}\right)-\theta^2 g_{A_1}}{\left(\theta g_{A_1}+g_{B_1}\right)^2} \cdot \pi_{A_2}^{V^*} - \frac{\theta g_{B_1}}{\left(\theta g_{A_1}+g_{B_1}\right)^2} \cdot \pi_{A_2}^{D^*} - 1 \\ \\ & = & \frac{\theta g_{B_1}}{\left(\theta g_{A_1}+g_{B_1}\right)^2} - \cdot \pi_{A_2}^{V^*} - \frac{\theta g_{B_1}}{\left(\theta g_{A_1}+g_{B_1}\right)^2} \cdot \pi_{A_2}^{D^*} - 1 = 0 \end{array}$$

$$\left(\theta g_{A_1} + g_{B_1}\right)^2 = \theta g_{B_1} \left(\pi_{A_2}^{V^*} - \pi_{A_2}^{D^*}\right) \tag{14}$$

$$\begin{array}{lcl} \frac{\partial \pi_{B_1}}{\partial g_{B_1}} & = & \frac{\theta g_{A_1}+g_{B_1}-g_{B_1}}{\left(\theta g_{A_1}+g_{B_1}\right)^2} \cdot \pi_{B_2}^{V^*} - \frac{\theta g_{A_1}}{\left(\theta g_{A_1}+g_{B_1}\right)^2} \cdot \pi_{B_2}^{D^*} - 1 \\ \\ & = & \frac{\theta g_{A_1}}{\left(\theta g_{A_1}+g_{B_1}\right)^2} - \cdot \pi_{B_2}^{V^*} - \frac{\theta g_{A_1}}{\left(\theta g_{A_1}+g_{B_1}\right)^2} \cdot \pi_{B_2}^{D^*} - 1 = 0 \end{array}$$

$$\left(\theta g_{A_1} + g_{B_1}\right)^2 = \theta g_{A_1} \left(\pi_{B_2}^{V^*} - \pi_{B_2}^{D^*}\right) \tag{15}$$

$$(14)\,\mathrm{y}\,(15) \Rightarrow \theta g_{B_1} \left(\pi_{A_2}^{V^*} - \pi_{A_2}^{D^*}\right) = \theta g_{A_1} \left(\pi_{B_2}^{V^*} - \pi_{B_2}^{D^*}\right) \Rightarrow g_{B_1} = \frac{\pi_{B_2}^{V^*} - \pi_{B_2}^{D^*}}{\pi_{A_2}^{V^*} - \pi_{A_2}^{D^*}} g_{A_1} \tag{16}$$

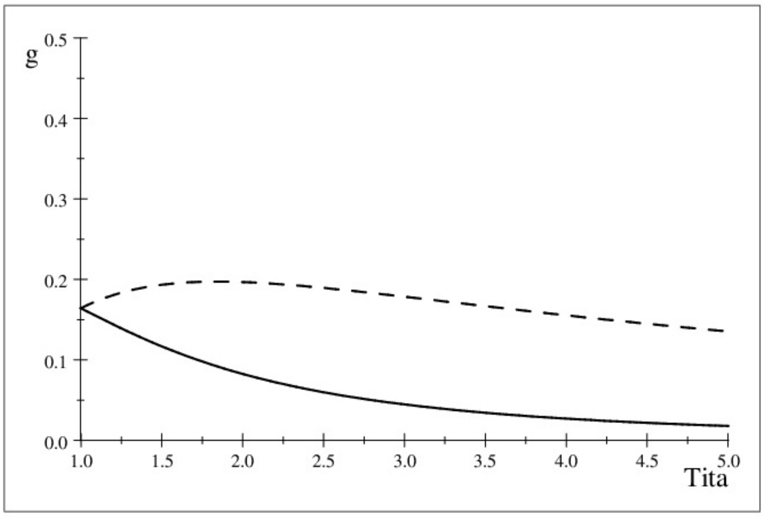
Sustituyendo en (15) tenemos que:

$$g_{A_1}^2\left(\frac{\theta\pi_{A_2}^{V^*}-\theta\pi_{A_2}^{D^*}+\pi_{B_2}^{V^*}-\pi_{B_2}^{D^*}}{\pi_{A_2}^{V^*}-\pi_{A_2}^{D^*}}\right)^2=\theta g_{A_1}\left(\pi_{B_2}^{V^*}-\pi_{B_2}^{D^*}\right)$$

Despejando g_{A_1} y sustituyendo en (16) obtenemos los esfuerzos de los dos equipos en equilibrio:

$$\begin{cases} g_{A_1}^* & = & \frac{\theta\left(\pi_{B_2}^{V^*}-\pi_{B_2}^{D^*}\right)\left(\pi_{A_2}^{V^*}-\pi_{A_2}^{D^*}\right)^2}{\left(\theta\pi_{A_2}^{V^*}-\theta\pi_{A_2}^{D^*}+\pi_{B_2}^{V^*}-\pi_{B_2}^{D^*}\right)^2} \\ \\ g_{B_1}^* & = & \frac{\theta\left(\pi_{B_2}^{V^*}-\pi_{B_2}^{D^*}\right)^2\left(\pi_{A_2}^{V^*}-\pi_{A_2}^{D^*}\right)}{\left(\theta\pi_{A_2}^{V^*}-\theta\pi_{A_2}^{D^*}+\pi_{B_2}^{V^*}-\pi_{B_2}^{D^*}\right)^2} \end{cases}$$

En la gráfica se puede observar como si no existen ventajas por jugar en el campo propio, lo que sucede si $\theta = 1$, los dos equipos realizan el mismo esfuerzo. Al aparecer estas ventajas, A disminuye su esfuerzo, lo que se puede pensar que está debido a que al contar con esas ventajas tiene más fácil el triunfo en el partido y eso hace que piense que no necesite emplearse a fondo para ganar.



Gráfica 7: Esfuerzos en el partido de ida

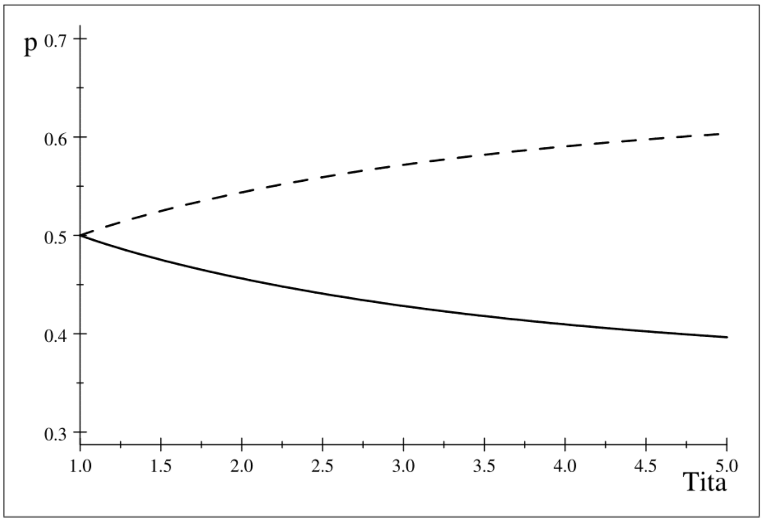
También se puede explicar este decrecimiento del esfuerzo de A teniendo en cuenta que si sus ventajas cuando juega como local son muy altas, las ventajas de B cuando juegue como local serán también muy altas, lo que hará que sea muy probable que B gane el partido de vuelta y, por tanto, aunque A gane este partido, B va a tener una probabilidad muy alta de ganar el siguiente y forzar una prórroga que se jugaría también en el campo de B y que también tendría B una probabilidad muy alta de ganarla al ser las ventajas de campo muy grandes, por lo que aunque A gane el partido de ida, va a ser B el que tenga más probabilidad de ganar la eliminatoria.

Este razonamiento explica por qué el esfuerzo de A es decreciente en θ, aunque en este caso a diferencia del partido de vuelta y la prórroga θ multiplique el esfuerzo que hace A, y por qué B realiza más esfuerzo que A. En primer lugar, para compensar las ventajas por jugar como local con las que cuenta A, y luego porque sabe que en el partido de vuelta va a contar con esas mismas ventajas con las que cuenta A en el partido de ida por lo que va a tener una mayor probabilidad de ganar el partido de vuelta, así que si también gana el partido de ida va a tener una probabilidad muy alta de ganar la eliminatoria.

Con los esfuerzos que hemos hallado anteriormente las probabilidades de ganar de los equipos en el equilibrio serán:

$$\begin{cases} p^*_{A_1} = \frac{\theta\left(\pi^{V^*}_{A_2} - \pi^{D^*}_{A_2}\right)}{\theta\pi^{V^*}_{A_2} - \theta\pi^{D^*}_{A_2} + \pi^{V^*}_{B_2} - \pi^{D^*}_{B_2}} \\ \\ p^*_{B_1} = \frac{\pi^{V^*}_{B_2} - \pi^{D^*}_{B_2}}{\theta\pi^{V^*}_{A_2} - \theta\pi^{D^*}_{A_2} + \pi^{V^*}_{B_2} - \pi^{D^*}_{B_2}} \end{cases}$$

Gráficamente se puede apreciar como si $\theta = 1$, es decir, si jugar como local no supusiera ninguna ventaja, los dos equipos tendrían la misma probabilidad de ganar, $p_{A_1} = p_{B_1} = \frac{1}{2}$.



Gráfica 8: Probabilidad de ganar en el partido de ida

Sin embargo, al aumentar el valor de θ vemos que lo que sucede es contrario a lo que nos dice la intuición. Podríamos pensar que al aumentar las ventajas de jugar como local A tiene una mayor probabilidad de ganar el partido de ida, dado que es el equipo que juega como local este partido. En cambio, la probabilidad de A de ganar disminuye al aumentar θ y la de B aumenta.

Esto se debe a lo que sucede en la continuación del juego, ya que las probabilidades de ganar dependen de los esfuerzos y estos dependen de lo que sucede en las siguientes partes del juego. Ya hemos visto que A disminuye su esfuerzo al aumentar θ, puesto que sabe que las ventajas que tenga cuando juegue de local en el partido de ida son las que tendrá B en el partido de vuelta y en la prórroga si ésta se jugara, por lo que sabe que aunque gane el primer partido tiene difícil ganar la eliminatoria. Todo esto también lo conoce B, que realiza un esfuerzo mayor que A para compensar las ventajas que tiene A por jugar como local y poder ganar la eliminatoria en el partido de vuelta en el que será B el que cuente con esas ventajas.

Estas tendencias de los esfuerzos explican que la probabilidad de A de ganar el partido sea decreciente en θ y la de B sea creciente, al contrario de lo que se puede pensar intuitivamente.

Sustituyendo $g^*_{A_1}$ y $g^*_{B_1}$ en π_{A_1} y π_{B_1} obtenemos los pagos en el equilibrio:

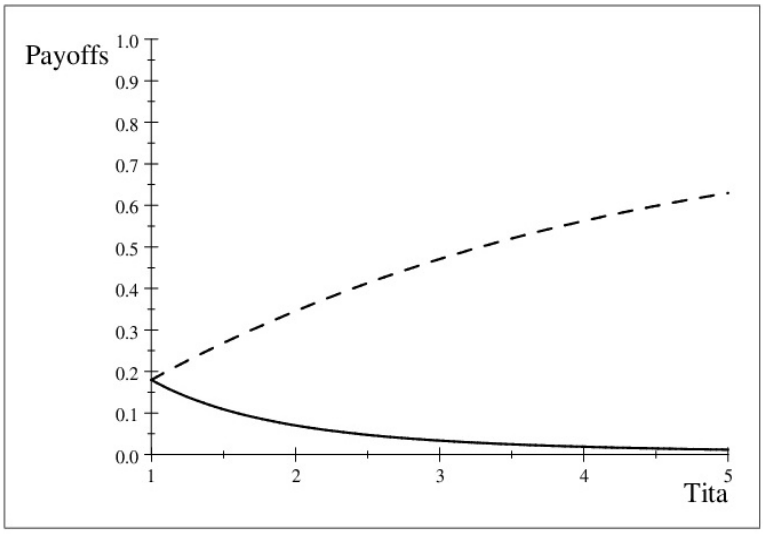
$$\pi^*_{A_1} = \frac{\theta\left(\pi^{V^*}_{A_2}-\pi^{D^*}_{A_2}\right)}{\theta\pi^{V^*}_{A_2}-\theta\pi^{D^*}_{A_2}+\pi^{V^*}_{B_2}-\pi^{D^*}_{B_2}} \cdot \pi^{V^*}_{A_2} + \frac{\pi^{V^*}_{B_2}-\pi^{D^*}_{B_2}}{\theta\pi^{V^*}_{A_2}-\theta\pi^{D^*}_{A_2}+\pi^{V^*}_{B_2}-\pi^{D^*}_{B_2}} \cdot \pi^{D^*}_{A_2} - \frac{\theta\left(\pi^{V^*}_{B_2}-\pi^{D^*}_{B_2}\right)\left(\pi^{V^*}_{A_2}-\pi^{D^*}_{A_2}\right)^2}{\left(\theta\pi^{V^*}_{A_2}-\theta\pi^{D^*}_{A_2}+\pi^{V^*}_{B_2}-\pi^{D^*}_{B_2}\right)^2}$$

$$\pi^*_{B_1} = \frac{\pi^{V^*}_{B_2}-\pi^{D^*}_{B_2}}{\theta\pi^{V^*}_{A_2}-\theta\pi^{D^*}_{A_2}+\pi^{V^*}_{B_2}-\pi^{D^*}_{B_2}} \cdot \pi^{V^*}_{B_2} + \frac{\theta\left(\pi^{V^*}_{A_2}-\pi^{D^*}_{A_2}\right)}{\theta\pi^{V^*}_{A_2}-\theta\pi^{D^*}_{A_2}+\pi^{V^*}_{B_2}-\pi^{D^*}_{B_2}} \cdot \pi^{D^*}_{B_2} - \frac{\theta\left(\pi^{V^*}_{B_2}-\pi^{D^*}_{B_2}\right)^2\left(\pi^{V^*}_{A_2}-\pi^{D^*}_{A_2}\right)}{\left(\theta\pi^{V^*}_{A_2}-\theta\pi^{D^*}_{A_2}+\pi^{V^*}_{B_2}-\pi^{D^*}_{B_2}\right)^2}$$

Gráficamente vemos como en el caso simétrico en el que no existen ventajas por jugar como local los dos equipos tendrían el mismo pago. Al igual que ocurre en la discusión de las probabilidades de ganar, el pago de A es decreciente en θ y el de B es creciente, lo que puede chocar con la intuición de que al tener mayores ventajas por jugar en el campo propio, lo que se refleja en el aumento del valor de θ, el equipo que juega como local debería tener un mayor pago que el que juega como visitante.

Sin embargo, es lo que sucede en la continuación del juego lo que hace que ocurra exactamente lo contrario. Vemos como lo que pasa en el partido de vuelta y en la prórroga afecta a los esfuerzos del partido de ida y como las probabilidades de ganar de los equipos dependen de sus esfuerzos, éstas se ven afectadas por lo que ocurre con los esfuerzos.

Los pagos en el partido de ida dependen de las probabilidades de ganar el partido de ida de los equipos y de los pagos esperados en el partido de vuelta y ambos son crecientes en θ en el caso de B y decrecientes en el caso de A. Por tanto, los pagos de los dos equipos en el partido de ida siguen esta misma tendencia. Comienzan siendo iguales en el caso simétrico en el que $\theta = 1$ para ser crecientes en θ en el caso de B y decrecientes en el caso de A.



Gráfica 9: Pagos en el partido de ida

4. Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos podido comprobar la gran influencia que tiene el orden, en lo que al campo se refiere, en el que se disputan los encuentros en una eliminatoria a doble partido, es decir, dónde se juega el partido de ida y dónde se juega el partido de vuelta y la prórroga, si fuera necesario que ésta se jugara, ya que hemos apreciado como los esfuerzos, las probabilidades de ganar y los pagos de los equipos varían en gran medida en función de si juegan la ida en casa y la vuelta y la hipotética prórroga fuera o viceversa.

Hemos visto como en cada una de las partes del juego la probabilidad de ganar del equipo B era creciente en θ, independientemente de si jugaba como local o como visitante, mientras que la probabilidad de ganar de A era decreciente. Esto confirma la idea intuitiva que se tenía de que es mejor jugar la vuelta en casa teniendo en cuenta sólo el efecto del campo, ya que a medida que aumentan las ventajas por jugar como local, el equipo que juega la vuelta en casa tiene una probabilidad de ganar mayor en cada uno de los partidos y en la prórroga.

En el caso del partido de ida esto puede resultar sorprendente, ya que se podría pensar que a medida que aumentan las ventajas por jugar como local el equipo A que es el que juega como local el partido de ida debería tener una mayor probabilidad de ganar. En cambio, sucede exactamente lo contrario, lo que se debe a lo que ocurre en la continuación del juego, ya que si A tiene muchas ventajas en la ida por jugar como local, B tendrá muchas ventajas en la vuelta y en la prórroga si ésta se jugara, lo que hace que aunque A gane el partido de ida tenga difícil ganar la eliminatoria, por lo que reduce su esfuerzo al conocer esto y en consecuencia disminuye su probabilidad de ganar el partido.

En el caso simétrico, es decir, si $\theta = 1$, tanto en la prórroga como en el partido de ida los dos equipos tienen la misma probabilidad de ganar, mientras que en el partido de vuelta esta probabilidad no es igual, puesto que depende de lo que ha sucedido en el primer partido, o sea, de si ha ganado A o B el partido de ida.

En el partido de vuelta hemos podido ver lo que ocurre cuando se combinan el efecto de desaliento por haber perdido el partido de ida y tener que ganar el partido de vuelta y la prórroga para ganar la eliminatoria con el efecto del campo y las ventajas por jugar como local. En el caso en el que A ganaba el partido de ida, si no hay ventajas por jugar en el campo propio, lo que sucede con $\theta = 1$, únicamente aparece el efecto de desaliento en B y se tiene que A tiene una probabilidad mayor de ganar el partido que B. Sin embargo, a medida que aumenta el valor de θ, la probabilidad de ganar de A decrece y la de B crece, existiendo un valor de θ, que hemos calculado que es 2, para el cual el efecto de las ventajas de jugar como local compensa el efecto de desaliento y ambos equipos tienen la misma probabilidad de ganar. A partir de este valor, el efecto del campo influye más que el efecto de desaliento y la probabilidad de ganar de B será mayor que la de A.

En el caso en el que B ganaba el partido de ida, en el partido de vuelta A tenía en su contra el efecto de desaliento por haber perdido el primer partido y las ventajas con las que cuenta B por jugar como local. Con $\theta = 1$, es decir, con la influencia únicamente del efecto de desaliento la probabilidad de ganar de B ya era mayor que la de A, y al aumentar el valor de θ esta diferencia crecía.

Debido a la complejidad de plasmar en un modelo todas las circunstancias que se pueden dar en una "eliminatoria a ida y vuelta" y a que nuestro objetivo era centrarnos en la influencia del factor campo hemos realizado simplificaciones, por lo que este modelo puede tener futuras extensiones.

Hemos supuesto que en ninguno de los partidos ni en la prórroga se puede dar un empate, o sea, o gana un equipo o gana otro. Una posible extensión sería introducir la posibilidad de empate y esto se podría realizar de dos maneras que se explican en dos artículos. La primera se detalla en el artículo de Blavatskyy, P. (2010) y consiste en definir las probabilidades de ganar el partido de los equipos suponiendo que sea el equipo A el que juega en casa como:

$$p_A = \frac{\theta g_A}{1 + \theta g_A + g_B}, \ p_B = \frac{g_B}{1 + \theta g_A + g_B}$$

La probabilidad de empate se define como:

$$p_{AB} = \frac{1}{1 + \theta g_A + g_B}$$

La segunda manera de introducir la posibilidad de empate se explica en el artículo de Vesperoni, A. y Yildizparlak, A. (2018) y consiste en definir las probabilidades de ganar de los equipos como en la Tullock sólo que añadiendo una constante $k \geq 1$ a la que se van elevar estas probabilidades y que expresa la sensibilidad al empate. La probabilidad de que se produzca un empate se va a definir como la probabilidad de que nadie gane, es decir, 1 menos la probabilidad de que alguien gane. Con todo esto tenemos que las probabilidades de ganar de los equipos suponiendo que sea el equipo A el que juega como local y la probabilidad de que haya un empate van a ser:

$$\begin{cases} p_A & = & \left(\frac{\theta g_A}{\theta g_A+g_B}\right)^k \\ \\ p_B & = & \left(\frac{g_B}{\theta g_A+g_B}\right)^k \\ \\ p_{AB} & = & 1-\frac{\theta^k g_A^k+g_B^k}{(\theta g_A+g_B)^k} \end{cases}$$

Si $k = 1$, desaparecería la posibilidad de empate, ya que la probabilidad de empate sería 0, y las probabilidades de ganar de los equipos estarían definidas como en nuestro modelo.

Al introducir la posibilidad de empate, se podría extender nuestro modelo añadiendo una cuarta etapa que serían los penalties y que al igual que la prórroga no sería fija como el partido de ida o el partido de vuelta, sino que se da en las "eliminatorias a ida y vuelta" cuando en la prórroga ninguno de los equipos mete un gol.

En nuestro modelo se ha supuesto que si gana el equipo local lo hace por 1-0 y que si gana el equipo visitante lo hace por 0-1. Otra posible extensión es añadir más resultados posibles para así poder tener en cuenta la influencia de los goles en campo contrario, ya que en la realidad en caso de producirse un empate en el marcador global al término del partido de vuelta o de la prórroga, gana el equipo que haya metido más goles en campo contrario.

Este efecto de los goles en campo contrario se puede pensar que está establecido para compensar el efecto del factor campo, dado que hemos podido comprobar en nuestro modelo como jugar la vuelta en casa resulta muy beneficioso, aunque como hemos hecho algunas simplificaciones eliminando otros efectos, faltaría verificar si sigue siendo igual de beneficioso añadiendo esos efectos que no hemos tenido en cuenta como el de los goles en campo contrario.

Referencias

[1] Blavatskyy, P. (2010). Contest success function with the possibility of a draw: axiomatization. Journal of Mathematical Economics 46 (2), 267-276.

[2] Fu, Q., Lu, J. y Pan, Y. (2015). Team Contests with Multiple Pairwise Battle. American Economic Review 105 (7), 2120-2140.

[3] Klumpp, T. y Polborn, M. (2006). Primaries and the New Hampshire Effect. Journal of Public Economics 90, 1073-1114.

[4] Konrad, K. (2012). Dynamic Contests and the Discouragement Effect. Revue d'économie politique 122, 2, 233-256.

[5] Vesperoni, A. y Yildizparlak, A. (2018). Contests with draws: axiomatization and equilibrium. Working paper.